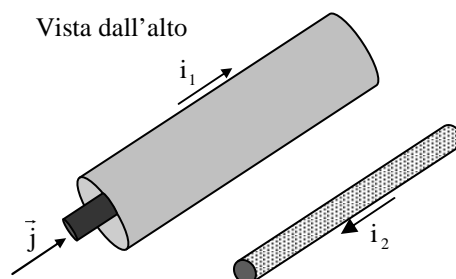


Facoltà di Ingegneria

2^a prova in itinere di Fisica II – 24.6.2004 – Compito A

Esercizio n.1

Un cavo coassiale indefinito è costituito da un filo conduttore cilindrico di raggio r_{int} circondato da una guaina conduttrice, cilindrica, coassiale al filo, di spessore trascurabile e raggio r_{ext} (vedi anche la sezione). Il filo interno è percorso da una corrente di densità uniforme \vec{j} ; sulla guaina esterna scorre una corrente i_1 , avente lo stesso verso di \vec{j} . Tra il cilindro interno pieno e la guaina esterna c'è il vuoto.



- Determinare il valore del campo magnetico al variare di r (distanza dall'asse del cilindro interno).

Successivamente, un secondo filo indefinito, di sezione trascurabile, percorso da una corrente i_2 con verso contrario ad i_1 (con $i_2 < i_1$), viene disposto parallelamente al cavo coassiale ed a distanza $d > r_{\text{ext}}$ dall'asse di esso.

- Determinare modulo, direzione e verso della forza per unità di lunghezza agente su tale filo.
- Calcolare infine il modulo del campo magnetico a distanza $\frac{d}{2}$ dall'asse del cavo coassiale, quando sono presenti sia il cavo coassiale che il filo percorso dalla corrente i_2 .

Rispondere quindi ai seguenti quesiti:

1. In presenza del solo cavo coassiale, per $r < r_{\text{int}}$, il modulo del campo magnetico ha espressione:

- A. $B = \frac{1}{2} \mu_0 j r$ (*)
- B. $B = \frac{1}{2} \mu_0 j$
- C. $B = \mu_0 j$
- D. $B = \frac{1}{2} \mu_0 j r_{\text{int}}^2$

2. In presenza del solo cavo coassiale, per $r_{\text{int}} < r < r_{\text{ext}}$, il modulo del campo magnetico ha espressione:

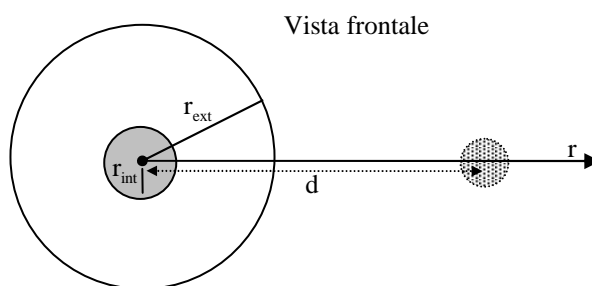
- A. $B = \frac{1}{2} \mu_0 j r^2$
- B. $B = \mu_0 j$
- C. $B = \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{r_{\text{int}}^2}{r}$ (*)
- D. $B = \frac{1}{2} \mu_0 j r_{\text{int}}^2$

3. In presenza del solo cavo coassiale, per $r > r_{\text{ext}}$, il modulo del campo magnetico ha espressione:

- A. $B = \frac{1}{2} \mu_0 i_1 r^2$
- B. $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(j\pi r_{\text{int}}^2 + i_1)}{r}$ (*)
- C. $B = \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{r_{\text{int}}^2}{r}$
- D. $B = \frac{1}{2} \mu_0 i_1 r_{\text{int}}^2$

4. La forza tra il cavo coassiale ed il filo con corrente i_2

- A. è attrattiva
- B. è repulsiva (*)



- C. agisce parallelamente ai fili
D. è nulla
5. La forza per unità di lunghezza sul filo percorso da corrente i_2 ha espressione
- A. $f = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2d}$
B. $f = \mu_0 \frac{(j\pi r_{int}^2 + i_1) i_2}{2\pi d} (*)$
C. $f = \mu_0 \frac{i_2 j\pi r_{int}^2}{2}$
D. $f = \mu_0 i_2 \frac{(j\pi r_{int}^2 + i_1)}{2\pi d}$
6. In presenza sia del cavo coassiale che dell'altro filo, il modulo del campo magnetico a distanza $\frac{d}{2}$ dal centro del cavo coassiale, vale
- A. $B = \mu_0 \frac{(i_1 + i_2)}{\pi d}$
B. $B = \mu_0 \frac{j r_{int}^2}{d} - \mu_0 \frac{(i_2 - i_1)}{d}$
C. $B = \mu_0 \frac{i_2}{\pi d}$
D. $B = \mu_0 \frac{j r_{int}^2}{d} + \mu_0 \frac{(i_1 + i_2)}{\pi d} (*)$

Esercizio n.2

Una bobina rettangolare, di lati a e b , composta da 2 spire sovrapposte, è posizionata nel piano xy (vedi figura) con un vertice nell'origine delle coordinate.

La bobina, che è costruita con filo metallico di conducibilità σ e sezione di area A , è immersa in un campo magnetico parallelo all'asse z , non uniforme e variabile nel tempo: $\vec{B} = k \times t^2 \hat{z}$ (con k costante e t tempo).

Trascurando il fenomeno dell'autoinduzione, si determini:

- la resistenza totale della bobina
- la corrente indotta nella bobina
- la potenza V_i dissipata nella bobina
- l'energia dissipata nella bobina dopo un tempo $t = t^*$
- il momento magnetico della bobina

Si ricordi che per un filo di lunghezza L e sezione A vale:

$$R = \rho \frac{L}{A} \equiv \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A}.$$

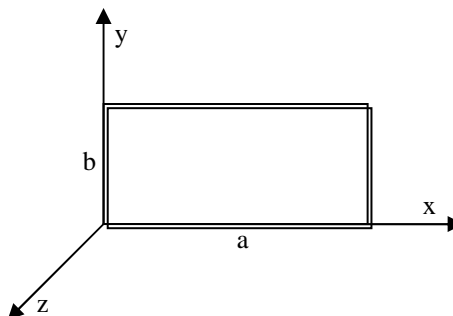
Rispondere quindi ai seguenti quesiti:

7. La resistenza totale della bobina vale:

- A. $R = \frac{4\sigma}{A} (a+b)$
B. $R = \frac{4\sigma}{A(a+b)}$
C. $R = \frac{2}{\sigma A} (a+b)$
D. $R = \frac{4}{\sigma A} (a+b) (*)$

8. Il flusso del campo magnetico attraverso una spira vale

- A. $\frac{1}{2} k b a^2 t^2 (*)$
B. $k b a^2 t^2$



- C. kb^2at
 D. $\frac{1}{2}kb^2at$
9. La forza elettromotrice indotta nella bobina ha modulo
 A. $2kba^2$
 B. $4kba^2t$
 C. $2kba^2t (*)$
 D. $4kb^2a^2t$
10. La corrente indotta nella bobina ha intensità

A. $i_{ind} = \frac{\sigma Akba^2}{(a+b)}$
 B. $i_{ind} = \frac{\sigma Akba^2t}{2(a+b)} (*)$
 C. $i_{ind} = \frac{\sigma Akba^2(a+b)}{2t}$
 D. $i_{ind} = \frac{\sigma Akbat}{2}$

11. La potenza dissipata nella bobina ha espressione

A. $\frac{\sigma Ak(a+b)t^2}{ab}$
 B. $\frac{k^2b^2a^4t^2}{\sigma A(a+b)}$
 C. $\frac{\sigma Ak^2b^2a^4t}{(a+b)^2}$
 D. $\frac{\sigma Ak^2b^2a^4t^2}{(a+b)} (*)$

12. L'energia dissipata nella bobina dopo un tempo $t = t^*$

A. $\frac{k^2b^2a^4t^*}{\sigma A(a+b)}$
 B. $\frac{\sigma Ak^2b^2a^4(t^*)^3}{3(a+b)} (*)$
 C. $\frac{\sigma Akba(t^*)^3}{3(a+b)}$
 D. $\frac{\sigma Ak^2(t^*)^4}{4(a+b)}$

13. Il momento magnetico della bobina ha espressione

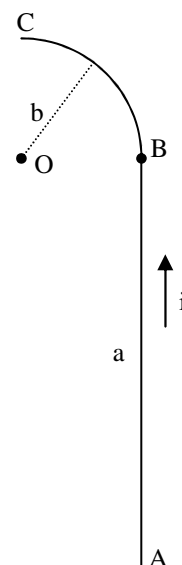
A. $\vec{\mu} = -2i_{ind}ab\hat{z} (*)$
 B. $\vec{\mu} = +2i_{ind}ab\hat{z}$
 C. $\vec{\mu} = -i_{ind}A\hat{z}$
 D. $\vec{\mu} = +\frac{1}{2}i_{ind}ab\hat{z}$

Esercizio n.3

Il filo in figura, composto dal tratto rettilineo AB di lunghezza a e dal tratto BC a quarto di circonferenza di raggio b , è parte di un circuito nel quale circola corrente. I tratti di filo AB e BC sono metallici, hanno rispettivamente resistività ρ_{AB} , ρ_{BC} ed hanno la stessa sezione circolare, di raggio $d/2$.

Tra A e C viene misurata una tensione $V = V_A - V_C$.

Si determini:



- la resistenza totale del filo (AB+BC)
- la corrente che circola nel filo in oggetto, usando la legge di Ohm $V=RI$.
- il campo magnetico nel punto O (centro del quarto di circonferenza) prodotto dalla corrente nel filo (AB+BC).

Si ricordi che per un filo di lunghezza L e sezione A vale: $R = \rho \frac{L}{A} \equiv \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A}$.

Valori numerici: $a=10\text{cm}$, $b=2\text{cm}$, $d=1\text{mm}$, $\rho_{AB} = 1.59 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, $\rho_{BC} = 1.67 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, $V = V_A - V_C = 10\text{mV}$,

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}.$$

Rispondere quindi ai seguenti quesiti

14. Rispetto ai capi A e C, le resistenze dei due tratti di filo, AB e BC, sono
 - A. In serie (*)
 - B. In parallelo
 - C. Nè in serie nè in parallelo
 - D. Sia in serie che in parallelo
15. La resistenza del filo (AB+BC) vale
 - A. $2.69\text{m}\Omega$ (*)
 - B. $13.25\text{m}\Omega$
 - C. 0.34Ω
 - D. 8.75Ω
16. La corrente che circola nel filo ha intensità
 - A. 7.63mA
 - B. 16.35mA
 - C. 0.12A
 - D. 3.71A (*)
17. Il campo magnetico nel punto O dovuto alla corrente che scorre nel tratto di filo AB ha modulo
 - A. $8.4\mu\text{T}$
 - B. $18.2\mu\text{T}$ (*)
 - C. 3.5mT
 - D. 22.3mT
18. Il campo magnetico nel punto O dovuto alla corrente che scorre nel tratto di filo BC ha modulo
 - A. $29.2\mu\text{T}$ (*)
 - B. $68.5\mu\text{T}$
 - C. 3.5mT
 - D. 12.3mT
19. Il campo magnetico in O generato dalla corrente nel filo (AB+BC) è
 - A. Parallelo al piano del foglio e rivolto verso destra
 - B. Parallelo al piano del foglio e diretto verso sinistra
 - C. Perpendicolare al piano del foglio ed uscente (cioè diretto verso l'alto) (*)
 - D. Perpendicolare al piano del foglio ed entrante (cioè diretto verso il basso)
20. Il modulo del campo magnetico in O generato dalla corrente nel filo (AB+BC) vale
 - A. $37.55\mu\text{T}$
 - B. $47.3\mu\text{T}$ (*)
 - C. 7.0mT
 - D. 32.6mT

Altri quesiti

21. Un fascio di protoni viaggia orizzontalmente verso un osservatore. Nell'avvicinarsi all'osservatore, attraversa una regione di spazio con un campo magnetico uniforme diretto verticalmente verso il basso. Tale campo deflette il fascio di protoni
 - A. verso l'alto
 - B. verso il basso
 - C. verso la destra dell'osservatore(*)
 - D. verso la sinistra dell'osservatore
22. Uno ione di carica $q=+2e$ entra con una velocità di $2.5 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in una regione dove vi è un campo magnetico uniforme di intensità 1.2T . La velocità dello ione è ortogonale alla direzione del campo magnetico. Ricordando che $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$, la forza sullo ione risulta:

- A. $1.3 \cdot 10^{-12}$ N
 B. $9.6 \cdot 10^{-14}$ N (*)
 C. $0.8 \cdot 10^{-16}$ N
 D. $5.2 \cdot 10^{13}$ N
23. Un filo, percorso da una corrente di 10 A, è posto ortogonalmente alle linee di forza di un campo magnetico uniforme \vec{B} . Su un tratto di questo filo, lungo 80 cm, si misura una forza di 0.2 N. Il campo magnetico ha modulo
 A. 18.0 T
 B. 10.4 T
 C. 0.52 T
 D. 0.025 T (*)
24. Una bobina di 20 spire ha un'area di 800 mm^2 ed è percorsa da una corrente di 0.5 A. La bobina è collocata con il suo asse perpendicolarmente alle linee di forza di un campo magnetico uniforme \vec{B} di intensità 0.3T. Calcolare il momento meccanico sulla bobina:
 A. $0.52 \cdot 10^{-2}$ Nm
 B. $2.4 \cdot 10^{-3}$ Nm (*)
 C. $8.9 \cdot 10^{-1}$ Nm
 D. $2.3 \cdot 10^2$ Nm
25. Il coefficiente di mutua induzione tra due circuiti è $M=8\text{mH}$. Determinare il modulo della fem indotta nel secondo circuito se la corrente nel primo circuito cambia al ritmo di $4 \frac{\text{kA}}{\text{s}}$:
 A. 30 mV
 B. 8V
 C. 32 V (*)
 D. 115 V

Soluzione

Esercizio n.1

Vista la simmetria cilindrica, per determinare il campo magnetico prodotto dal cavo coassiale, conviene utilizzare il teorema di Ampère: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{ch}}$.

Per $r < r_{\text{int}}$ si ha:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{ch}} \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 j A' = \mu_0 j \pi r^2 \rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 j r$$

Per $r_{\text{int}} < r < r_{\text{ext}}$ risulta:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{ch}} \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 j A = \mu_0 j \pi r_{\text{int}}^2 \rightarrow B = \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{r_{\text{int}}^2}{r}$$

Per $r_{\text{ext}} < r$ risulta:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{ch}} \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 (j A + i_1) = \mu_0 (j \pi r_{\text{int}}^2 + i_1) \rightarrow B = \mu_0 \frac{(j \pi r_{\text{int}}^2 + i_1)}{2\pi r}$$

La forza (repulsiva) per unità di lunghezza sul filo percorso dalla corrente i_2 vale

$$f = \frac{F}{l} = \frac{i_2 l B}{l} \rightarrow f = i_2 B(d) = \mu_0 i_2 \frac{(j \pi r_{\text{int}}^2 + i_1)}{2\pi d}$$

Per il principio di azione e reazione la forza per unità di lunghezza sul cavo coassiale vale

$$f' = -f$$

Il campo magnetico a distanza $\frac{d}{2}$ dal centro del cavo coassiale è la somma vettoriale del campo del cavo coassiale e di quello del filo con corrente i_2 :

$$B = |\vec{B}_1 + \vec{B}_2| = \mu_0 \frac{(j r_{int}^2 + i_1)}{\pi d} + \mu_0 \frac{i_2}{\pi d} = \mu_0 \frac{j r_{int}^2}{d} + \mu_0 \frac{(i_1 + i_2)}{\pi d}$$

essendo \vec{B}_1 e \vec{B}_2 vettori con la stessa direzione e con lo stesso verso.

Esercizio n.2

Usando la formula $R = \rho \frac{L}{A} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A}$, la resistenza totale della bobina risulta

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{4a}{A} + \frac{1}{\sigma} \frac{4b}{A} = \frac{4}{\sigma A} (a + b)$$

Il flusso del campo magnetico attraverso la bobina vale

$$\Phi(t) = 2 \int_{AreaSpira} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 2 \int_0^a \int_0^b B dx dy = 2 \int_0^a \int_0^b k x t^2 dx dy = 2 k b t^2 \int_0^a x dx = k b a^2 t^2$$

La f.e.m indotta ha valore assoluto

$$\xi = \left| - \frac{d}{dt} \Phi(t) \right| = 2 k b a^2 t$$

e la corrente indotta risulta

$$i_{ind} = \frac{\xi}{R} = \frac{\sigma A k b a^2 t}{2(a+b)}$$

La potenza dissipata, in funzione del tempo, è

$$P = v_i = \xi i_{ind} = 2 k b a^2 t \frac{\sigma A k b a^2 t}{2(a+b)} = \frac{\sigma A k^2 b^2 a^4 t^2}{(a+b)}$$

Dopo un tempo $t = t^*$, l'energia dissipata nella bobina sotto forma di calore (effetto Joule) vale

$$P = \frac{dE}{dt} \rightarrow E = \int_0^{t^*} P dt = \int_0^{t^*} \frac{\sigma A k^2 b^2 a^4 t^2}{(a+b)} dt = \frac{\sigma A k^2 b^2 a^4}{(a+b)} \int_0^{t^*} t^2 dt = \frac{\sigma A k^2 b^2 a^4 (t^*)^3}{3(a+b)}$$

Ricordando che il momento magnetico di una spira percorsa da corrente i e di area A è $\vec{\mu} = i A \hat{n}$, con \hat{n} versore normale al piano della spira, orientato secondo la regola della mano destra rispetto al verso di percorrenza della corrente, il momento magnetico della bobina vale $\vec{\mu} = -2 i_{ind} a b \hat{z}$.

Il segno $-$ viene dal fatto che, in accordo alla legge di Lenz, la corrente circola nella bobina in senso orario; il 2 è dovuto al fatto che la bobina è costituita da due spire.

Esercizio n.3

La resistenza del filo rettilineo AB vale

$$R_{AB} = \rho_{AB} \frac{a}{\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2} = 0,00202 \Omega = 2.02 m\Omega$$

mentre quella del tratto BC risulta

$$R_{BC} = \rho_{BC} \frac{\frac{\pi b}{2}}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 0.000668 \Omega = 0.668 \text{ m}\Omega$$

Essendo R_{AB} ed R_{BC} in serie, la resistenza totale del filo (AB+BC) è $R = R_{AB} + R_{BC} = 2.693 \text{ m}\Omega$

Dalla legge di Ohm segue che la corrente che fluisce nel filo vale

$$i = \frac{V_A - V_C}{R} = 3.713 \text{ A}$$

Applicando la 1° formula di Laplace si dimostra che il campo magnetico in O dovuto alla corrente nel filo AB è

$$B_{AB}(O) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{a}{b\sqrt{a^2 + b^2}} = 18.204 \cdot 10^{-6} \text{ T} = 18.204 \mu\text{T}$$

mentre quello generato dalla corrente nel filo AC vale

$$B_{BC}(O) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\theta}{b} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\frac{\pi}{2}}{b} = \frac{\mu_0 i}{8b} = 29.147 \cdot 10^{-6} \text{ T} = 29.147 \mu\text{T}$$

Dal principio di sovrapposizione, il campo magnetico in O generato dalla corrente nel filo AC, risulta

$$B(O) = B_{AB}(O) + B_{BC}(O) = 47.351 \mu\text{T}$$

La corrente fluisce da A verso C. Per la regola della mano destra, il campo magnetico in O, diretto ortogonalmente al piano del foglio, ha verso uscente.